

Sciences et Techniques Automatisées (STA-MSI)
MECANIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES PT1
Examen de fin du 2^{ème} semestre Date: 18 Mai 2023 Durée: 1h30min

On propose l'étude cinématique et statique d'un système de triage de pièces en forme de U. La figure 1 représente le schéma cinématique minimal du système. Les principaux éléments du mécanisme sont :

- le bâti (0) lié au repère $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ supposé galiléen
- la traverse (1) lié au repère $R_1(O_1, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$, en liaison glissière d'axe $(O, \vec{Y}_0)$ avec le bâti (0)
- le bras (2) lié au repère $R_2(A, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_0)$, en liaison pivot d'axe $(A, \vec{Z}_0)$ avec la traverse (1) tel que : $\beta = (\vec{X}_0, \vec{X}_2) = (\vec{Y}_0, \vec{Y}_2)$. Ce bras est muni d'une lumière dans laquelle peut coulisser un doigt solidaire du levier (3) et la liaison entre le bras (2) et le levier (3) est supposée ponctuelle de normale $(C, \vec{Y}_2)$
- le levier (3) lié au repère $R_3(B, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_0)$ en liaison pivot d'axe $(B, \vec{Z}_0)$ avec le bâti (0) tel que : $\theta = (\vec{X}_0, \vec{X}_3) = (\vec{Y}_0, \vec{Y}_3)$. De plus il est en liaison ponctuelle de normale $(D, \vec{X}_0)$ avec le coulisseau (4)
- le coulisseau (4) en liaison glissière d'axe $(E, \vec{X}_0)$ avec le bâti (0).

Les positions des différents centres de liaison sont décrites par les relations vectorielles :

$$\vec{OO}_1 = -\lambda \vec{Y}_0, \quad \vec{OA} = a \vec{X}_0 - b \vec{Y}_0, \quad \vec{AC} = -L \vec{Y}_2, \quad \vec{BC} = R \vec{X}_3, \quad \vec{DB} = r \vec{U}, \quad \alpha = (\vec{X}_3, \vec{U})$$
$$\vec{HE} = \mu \vec{X}_0 \text{ et } \vec{DE} = \delta \vec{X}_0 - \eta \vec{Y}_0$$

Les angles β et θ sont les paramètres angulaires du mécanisme et λ défini le paramètre de translation de la traverse (1), μ est le paramètre de translation du coulisseau (4), a , b , L , r et R sont des constantes géométriques du mécanisme, α est l'écart angulaire constant entre les deux bras du levier (3).

Partiel 1 : Etude cinématique

- 1) Déterminer les vecteurs rotations: $\vec{\Omega}(1/R_0)$, $\vec{\Omega}(2/R_0)$, $\vec{\Omega}(3/R_0)$, $\vec{\Omega}(4/R_0)$
- 2) Calculer, par cinématique des solides et dans la base $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$, les vecteurs vitesses suivants :
 - 2.a) $\vec{V}(D \in 3/R_0)$
 - 2.b) $\vec{V}(D \in 4/R_0)$ en fonction de $\dot{\mu}$
 - 2.c) Dédire que la composante suivant $\vec{Y}_0$ de la vitesse de glissement au point D de (3)/(4) est :
$$\vec{V}(D \in 3/4) \cdot \vec{Y}_0 = r \dot{\theta} \cos(\alpha - \theta)$$
- 3) On note I_{ij} le centre instantané de rotation lorsqu'il existe du mouvement du solide (i) par rapport au solide (j).
 - 3.a) Déterminer : I_{10} , I_{21} , I_{32} et I_{30}
 - 3.b) Quelle est la direction du vecteur $\vec{V}(A \in 2/R_0)$?, déduire sur quelle droite se trouve I_{20} .
 - 3.c) En utilisant le théorème des 3 plans, déduire la position exacte de I_{20} .

Partie2 : Etude statique

L'ensemble est supposé à l'équilibre par rapport au repère galiléen R_0 . Les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison ponctuelle au point **D** entre (3) et (4) et la liaison glissière au point **E** entre (4) et (0) qui sont caractérisées par un frottement de glissement de coefficient f .

On précise que le problème traité est **plan** et sera étudié dans le plan $P_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$ et l'effet de la pesanteur est négligé.

La forme générale du torseur d'action mécanique du solide (i) sur le solide (j) associés par une liaison sera

$$\text{notée } \left\{ \tau_{(i) \rightarrow (j)} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} X_M & \mathbf{0} \\ Y_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_M \end{array} \right\}_{M \text{ (Centre de liaison)}}^{R \text{ (repère)}} \quad \text{où } X_M, Y_M, \text{ et } N_M \text{ peuvent être nul suivant la liaison concernée.}$$

L'action de l'effort d'entrée sur la traverse (1) au point O_1 est donnée par : $\vec{F}_m = -F_m \vec{Y}_0$ où F_m est le module de la force.

L'action de la pièce en forme de U (non représentée) sur le coulisseau (4) au point **H** est donnée par : $\vec{F}_r = F_r \vec{X}_0$.

N.B : La liaison entre le bras (2) et le levier (3) est supposée ponctuelle de normale $(C, \vec{Y}_2)$ et le module de la résultante de l'action mécanique de (3) sur (2) sera noté F_C .

4) Etude de l'équilibre de la traverse (1) :

- 4.a) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (0) sur (1) : $\left\{ \tau_{(0) \rightarrow (1)} \right\}_O^{R_0}$.
- 4.b) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (2) sur (1) : $\left\{ \tau_{(2) \rightarrow (1)} \right\}_A^{R_0}$.
- 4.c) En appliquant le principe fondamental de la statique (en **O**) et dans la base de R_0 , étudier l'équilibre de la traverse (1).
- 4.d) Ecrire les équations d'équilibre de (1).

5) Etude de l'équilibre du bras (2) :

- 5.a) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (1) sur (2) : $\left\{ \tau_{(1) \rightarrow (2)} \right\}_A^{R_0}$.
 - 5.b) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (3) sur (2) : $\left\{ \tau_{(3) \rightarrow (2)} \right\}_C^{R_2}$ en fonction de F_C , en déduire $\left\{ \tau_{(3) \rightarrow (2)} \right\}_A^{R_2}$ puis l'exprimer ce dernier dans la base du repère R_0 : $\left\{ \tau_{(3) \rightarrow (2)} \right\}_A^{R_0}$.
 - 5.c) En appliquant le principe fondamental de la statique (en **A**) et dans la base de R_0 , étudier l'équilibre du bras (2).
 - 5.d) Ecrire les équations d'équilibre de (2).
- 6) Déduire à partir de 4.d) et 5.d) $\left\{ \tau_{(2) \rightarrow (1)} \right\}_A^{R_0}$ et $\left\{ \tau_{(0) \rightarrow (1)} \right\}_O^{R_0}$ en fonction de F_m et des données géométriques.

7) Etude de l'équilibre du levier (3) :

- 7.a) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (0) sur (3) : $\left\{ \tau_{(0) \rightarrow (3)} \right\}_B^{R_0}$.
- 7.b) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (2) sur (3) : $\left\{ \tau_{(2) \rightarrow (3)} \right\}_C^{R_0}$.

- 7.c) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (4) sur (3) : $\{\tau_{(4) \rightarrow (3)}\}_D^{R_0}$ (Attention cette la liaison de (3)/(4) n'est pas parfaite de plus on suppose que $\dot{\theta} > 0$).
- 7.d) En appliquant le principe fondamental de la statique (**en D**) et dans la base de R_0 , étudier l'équilibre du levier (3).
- 7.e) Ecrire les équations d'équilibre de (3).
- 8) Etude de l'équilibre du coulisseau (4) :
- 8.a) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique non parfaite de (0) sur (4) : $\{\tau_{(0) \rightarrow (4)}\}_E^{R_0}$.
- 8.b) Ecrire la forme générale du torseur de l'action mécanique de (3) sur (4) : $\{\tau_{(3) \rightarrow (4)}\}_D^{R_0}$.
- 8.c) En appliquant le principe fondamental de la statique (**en E**) et dans la base de R_0 , étudier l'équilibre du coulisseau (4).
- 8.d) Ecrire les équations d'équilibre de (4).
- 9) A partir des équations 7.e), 8.d) et les résultats de 6) proposer une méthodologie de résolution permettant de trouver la relation entre F_r et F_m (la résolution n'est pas demandée).

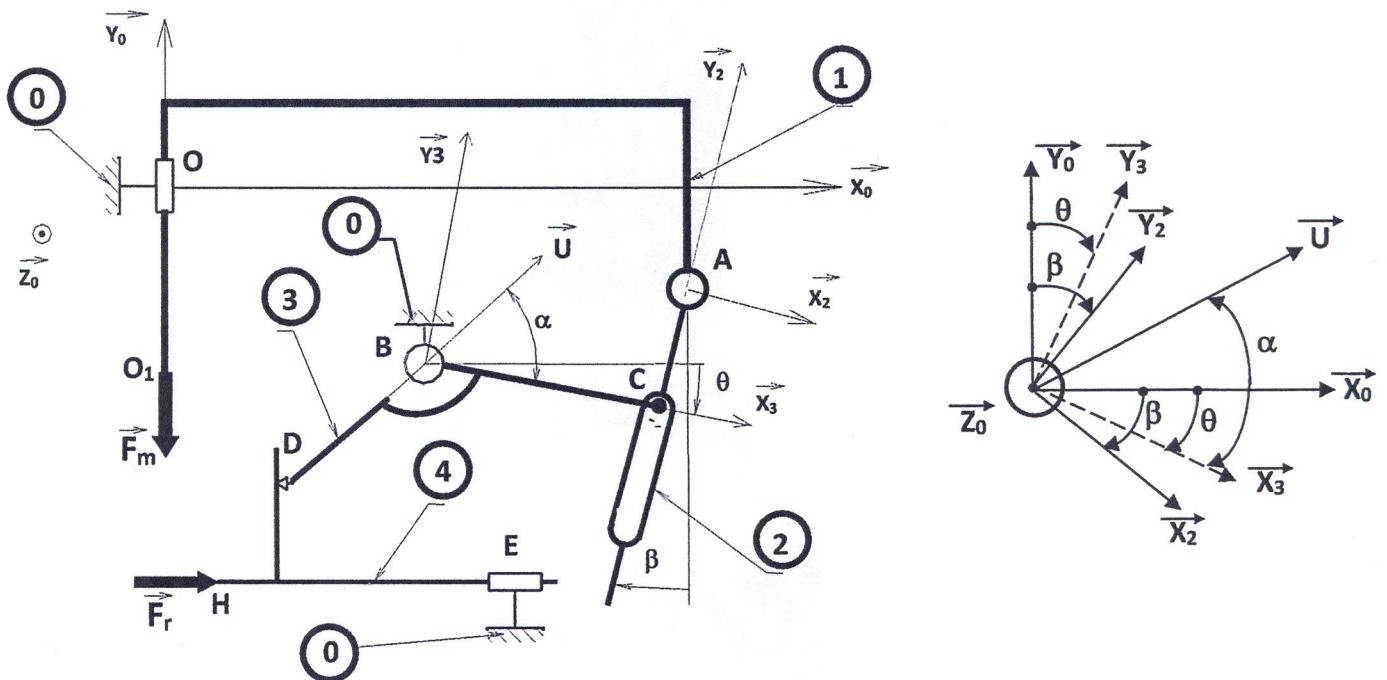


Figure 1